Mathematik I, Übungsblatt 5

1. Bestimmen Sie den Grenzwert (auch $\pm\infty$):
   a) $a_n = n^2 + \sqrt{n} + 1$ b) $a_n = -3^n - \frac{1}{n}\cos(n)$ c) $a_n = \frac{4n^3-5n^2+1}{7n^3-2n}$

2. Bestimmen Sie den Grenzwert (auch $\pm\infty$):
   a) $a_n = 3n^2 + \frac{1}{n\ln(n)}$ b) $a_n = -n^2 \cdot \ln(n) + 3$ c) $a_n = \frac{-4(1+\mathrm{e}^{-n})}{\sqrt{n}}$

3. **Fibonacci-Folge:** Finden Sie eine Rekursion für die Anzahl der Kaninchenpaare K_n nach n Monaten unter der Annahme, dass jedes Paar pro Monat ein neues Paar zeugt, welches aber erst im übernächsten Monat zeugungsfähig ist. Angenommen, Sie beginnen mit einem neugeborenen Paar, also $K_1 = K_2 = 1$. Konvergiert die Folge?

   Dieses Problem wurde erstmals im 13. Jahrhundert von Leonardo di Pisa (auch Fibonacci genannt) untersucht. Die Fibonacci-Folge hat noch viele weitere Anwendungen in der Mathematik und Botanik.

4. Die Heron'sche Folge $a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\right)$ $(n \geq 2)$ konvergiert bei beliebigem positiven Startwert a_1 gegen $\sqrt{x}$. Was passiert, wenn ein negatives a_1 gewählt wird?

5. Zeigen Sie
$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q}{1-q}\left(\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n\right).$$

6. Schreiben Sie $4.3\overline{12}$ mithilfe einer geometrischen Reihe als Bruch.

7. Welche Reihen sind konvergent? Testen Sie mithilfe eines geeigneten Kriteriums. Ein Grenzwert braucht nicht angegeben zu werden.
   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{k^5}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 x^k}{k!}$

8. Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

   Hinweis: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.