Mathematik I, Übungsblatt 4

1. Geben Sie die Relationen $<, >, \geq, \leq, =, \neq$ in $A = \{0, 1, 2, 3\}$ an und untersuchen Sie jeweils, ob die Relation reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv ist.

2. Geben Sie ein Beispiel für eine Relation, die
   a) weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch ist,
   b) zwei dieser Eigenschaften hat.
   c) Kann es sein, dass eine Relation alle drei Eigenschaften hat?

3. Angenommen, Huber (H) spricht die Sprachen Englisch und Deutsch, Meier (M) spricht nur Deutsch, und Smith (S) nur Englisch. Geben Sie die Relation „a und b sprechen eine gemeinsame Sprache“ auf der Menge $\{H, M, S\}$ an. Handelt es sich um eine Äquivalenzrelation?

4. Können die Werte (x, y), die $x^2 + y^2 = 4$ erfüllen, auch durch eine Funktion $y = f(x)$ beschrieben werden? Wo liegen die Punkte (x, y), die diese Relation erfüllen?

5. Gegeben ist $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.
   a) Wo ist f streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend?
   b) Ist f (nach unten/oben) beschränkt?

6. Schränken Sie den Definitions- und Wertebereich von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ geeignet ein, damit die Funktion bijektiv wird. Geben Sie die Umkehrfunktion an.

7. Gegeben sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x$ und $g(x) = x + b$ (wobei $a, b \in \mathbb{R}$ sind, $a \neq 0$). Geben Sie an:
   a) $g \circ f$ b) $f \circ g$ c) f^{-1} und g^{-1} d) $(f \circ g)^{-1}$

8. Zeigen Sie: Wenn f und g injektiv sind, dann ist auch $f \circ g$ injektiv.