Mathematik 1, Übungsblatt 2A

1. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$

$$n^2 \leq 2^n$$

gilt.

2. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$n^3 - n$$

durch 6 teilbar ist.

3. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass

a) für die Glieder der Fibonacci-Folge $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$,

$$1 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2}$$

gilt.

b) für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$

$$n! > 2^n$$

gilt.

4. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $a > 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n - 1$$

ist durch $a - 1$ teilbar.

5. Zeigen Sie, dass $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

gilt.

6. Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Warum? (Verwenden Sie für den Beweis von d die Dreiecksungleichung!)

a) $\forall\ x \in \mathbb{R}, x \geq 2 : x - 5 > -3.$
b) $\forall\ x \in \mathbb{R}, x < -1 : -x \geq 2^{-1}.$
c) $\forall\ x \in \mathbb{R}, x > 6 : 3x > 20.$
d) $\forall\ a, b \in \mathbb{R} : |a - b| \leq |-a| + |b|.$

7. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist nach oben bzw. nach unten beschränkt? Geben Sie jeweils eine obere und eine untere Schranke, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum an (sofern sie existieren).

a) die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$
b) $M_1 = (-\pi, \pi]$
c) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$
d) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\} \cap \mathbb{Z}$

8. Berechnen Sie folgende komplexe Zahlen, geben Sie jeweils die konjugiert komplexe Zahl an und stellen Sie diese Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

a) $z_1 = i^2(\overline{1 - i})$
b) $z_2 = \frac{1}{i}$
c) $z_3 = |(1 + i)(\overline{1 + i})|$
d) $z_4 = |\frac{1}{2-i}| - i^2$

9. Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen und stellen Sie das Ergebnis in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

a) $\frac{3+i}{3-4i} + 3\frac{i-1}{5i}$
b) $3(\frac{1+i}{1-i})^2 - 2(\frac{i-1}{1-i})^3$
c) $\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

10. Stellen Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlen graphisch dar:
a) $\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leq Re(z) < \frac{2}{3}\}$
b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |Im(z)| \leq 2\}$
c) $\{z \in \mathbb{C} \mid Im(3z + 7) = 1\}$

11. Stellen Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlen graphisch dar:
a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < Im(z) < \pi\}$
b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$
c) $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(5iz) = 2\}$

12. Für welche $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, gilt $\overline{z} = \frac{1}{z}$?

13. Beweisen Sie dass $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$

$$\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w} \quad \text{und} \quad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$

gilt.

14. Finden Sie den Fehler im „Beweis“ der folgenden Behauptung:

Ist in einer Gruppe von Personen eine Person blond, so sind alle blond.

Beweis. Induktionsanfang: Für eine Gruppe der Größe 1 stimmt die Behauptung.
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte bereits für Gruppen der Größe n.
Induktionsschritt: Wir betrachten nun eine Gruppe der Größe $n+1$ in der zumindest eine Person (genannt P_1) blond ist. Somit sind nach der Induktionsvoraussetzung in der Gruppe bestehend aus den Personen $P_1, \ldots P_n$ alle blond. Da wir nun wissen dass in der Gruppe $P_2, \ldots P_{n+1}$ zumindest eine Person blond ist und diese Gruppe aus n Personen besteht, sind aufgrund der Induktionsvoraussetzung alle $n+1$ Personen blond. $\square$

15. Berechnen Sie

$$a)\sum_{k=3}^{6} 4k \qquad b)\sum_{k=0}^{3}(2k+k^3) \qquad c)\sum_{j=-2}^{3}(j+k)4k \qquad d)\sum_{k=-2}^{3}(j+k)4k$$

Verwenden Sie dazu die folgenden **Rechenregeln für Summen**: Für $n, m \in \mathbb{N}$, reelle oder komplexe Zahlen $a_0, \ldots, a_n, b_0 \ldots, b_n$ und c gilt:

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k \tag{1}$$

$$\sum_{k=m}^{n} ca_k = c\sum_{k=m}^{n} a_k \tag{2}$$

16. Berechnen Sie

$$a)\sum_{i=2}^{5} a \qquad b)\sum_{l=-3}^{0}(ml+1) \qquad c)\sum_{n=-2}^{2} a^{-n} \qquad d)\sum_{k=0}^{3}\sum_{j=1}^{2} jk$$

Verwenden Sie dazu die Rechenregeln für Summen aus Aufgabe 15.

17. Auch für Produkte von reellen (oder komplexen) Zahlen $a_0, \ldots, a_k$ gibt es eine abkürzende Schreibweise:

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdots a_n$$

Berechnen Sie

$$a) \prod_{j=0}^{5} \frac{\sqrt{2}j}{\pi} \qquad b) \prod_{n=0}^{2} a^{-n} \qquad c) \prod_{n=-2}^{2} \pi a^{-n}$$

d) Stellen Sie $n!$ in Produktschreibweise dar.

18. Schreiben Sie mithilfe des Summen- bzw. Produktzeichens:

a) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$
b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$
c) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{5!}$
d) $-2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 5^2$

19.
a) Stellen Sie $(42,2)_{10}$ im Dualsystem dar.
b) Stellen Sie $(42,2)_{10}$ im Hexadezimalsystem dar.
c) Stellen Sie $(42,2)_{10}$ im Oktalsystem dar.
d) Stellen Sie $(113)_8$ im Dezimalsystem dar.

20. Erklären Sie mit Hilfe des Siebs des Eratosthenes welche der folgenden Zahlen Primzahlen sind: $7, 9, 25, 36, 47, 49, 51, 59$.
Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Sieb_des_Eratosthenes

21. Erklären Sie welche der Zahlen $25, 31, 43, 49, 61, 73, 113, 173, 251$ Primzahlen sind indem Sie der Reihe nach alle Zahlen die als Teiler in Frage kommen könnten ausschließen. Welche möglichen Teiler müssen Sie dabei zumindest überprüfen?

22. Geben Sie die Primfaktorzerlegung der Zahlen $8, 18, 25, 36, 42, 77, 81$ an und erklären Sie zu jeder dieser Zahlen mit welcher der anderen sie jeweils teilerfremd ist.

23. Berechnen Sie die Reste von $13, -34, -47, 58$ jeweils modulo $2, 4, 5, 6, 7, 8, 10$.

24. Es gibt unendlich viele Primzahlen. Erklären Sie den Beweis dieses Satzes von Euklid (siehe Buch S. 56 oder http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Euklid).

25. Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Warum?
a) Für alle ganzen geraden Zahlen n gilt: $n = 0 \pmod 2$.
b) $\forall\, k \in \mathbb{Z} : 13 + k = 16 + k \pmod 3$
c) $\forall\, k \in \mathbb{Z} : 11k = 23k \pmod 3$
d) $\forall\, k \in \mathbb{Z} : 13k = 2k \pmod k$
e) $\forall\, k \in \mathbb{Z} : 2 + k = 7 + k \pmod 4$

26. Geben Sie die Restklassen von
a) 0 modulo 3
b) 4 modulo 5
c) 7 modulo 2
d) 1 modulo 6
und alle Restklassen modulo 4 an.

27. Berechnen Sie die Additions– und die Multiplikationstabelle für $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_8$ und lesen Sie $\mathbb{Z}_3^*$, $\mathbb{Z}_6^*$ und $\mathbb{Z}_8^*$ jeweils aus der Tabelle ab.

28. Geben Sie $\mathbb{Z}_7^*$, $\mathbb{Z}_9^*$, $\mathbb{Z}_{10}^*$, $\mathbb{Z}_{12}^*$, $\mathbb{Z}_{14}^*$ und $\mathbb{Z}_{16}^*$ an.

29. Berechnen Sie die Prüfziffern zu den ISBN-Nummern 3–540–40460, 3–453–14697 und 3–702–64850.

30. Bildet die Menge der geraden ganzen Zahlen $(G, +)$, $G = \{\, 2m \,|\, m \in \mathbb{Z} \,\}$, eine Gruppe? Begründen Sie warum bzw. warum nicht. Ist $(G, +)$ kommutativ?

31. Bildet die Menge der ungeraden ganzen Zahlen $(H, +)$, $H = \{\ 2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\ \}$, eine Gruppe? Begründen Sie warum bzw. warum nicht.

32. Gegeben sei ein Quadrat Q. Eine Drehung des Quadrats um seinen Mittelpunkt wird durch $d \in \mathbb{R}$ beschrieben, wobei $d > 0$ einer Drehung um d Grad im Uhrzeigersinn und $d < 0$ einer Drehung um d Grad gegen den Uhrzeigersinn entspricht.

Die Verknüpfung $e \circ d$ bedeutet dass das Quadrat zuerst um d Grad und dann um e Grad gedreht wird. Sei nun $D = \{\ d \text{ Drehung} \,|\, d \in \mathbb{R}\ \}$ die Menge aller Drehungen des Quadrats Q um seinen Mittelpunkt. Bildet $(D, \circ)$ eine (kommutative) Gruppe?