

Mathematik I, Übungsblatt 2

1. a) Gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ und für beliebiges $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ immer

$$\frac{x}{b+x} < \frac{y}{b+y}?$$

- b) Gilt für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ immer

$$\frac{a \cdot 2^{-n}}{a \cdot 2^{-n} + b} \leq \frac{a}{b} \cdot 2^{-n}.$$

Diese Abschätzungen werden z.B. gebraucht um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein Primzahltest – der z.B. Primzahlen für den RSA-Algorithmus finden soll – eine Zahl fälschlicherweise als Primzahl identifiziert.

2. Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.
3. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

4. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

5. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass

$$(1+x)^n > 1 + n \cdot x \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ mit } n > 1$$

gilt (dabei ist $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, $x \neq 0$).

6. a) Stellen Sie $(110\,011.01)_2$ im Dezimalsystem dar.
b) Stellen Sie $(359.2)_{10}$ im Dualsystem dar.
c) Stellen Sie $(8978)_{10}$ im Oktalsystem dar.
d) Stellen Sie $(ABCD)_{16}$ im Dezimalsystem dar.

7. Die Lösung des Gleichungssystems $ax - by = 1$, $cx - dy = 0$ ist gegeben durch $x = \frac{d}{ad-bc}$ und $y = \frac{c}{ad-bc}$. Berechnen Sie die Lösung für den Fall $a = 64919121$, $b = 159018721$, $c = 41869520.5$, $d = 102558961$ mit Gleitkommaarithmetik (Mantisse mit 16 Dezimalstellen) und exakt. Nehmen Sie an, dass eine zu lange Mantisse einmal auf- und einmal abgerundet wird (in der Praxis hängt das Ergebnis vom verwendeten Zahlensystem und der genauen Rundungsvorschrift ab).

Dieses Problem kann auch geometrisch verstanden werden: Die beiden Gleichungen können als zwei Geraden interpretiert werden. Die Lösung ist der Schnittpunkt der beiden Geraden. Im Allgemeinen wird eine kleine Verschiebung einer Geraden (aufgrund von Rundungsfehlern) auch den Schnittpunkt nur wenig verschieben. Sind die beiden Geraden aber fast parallel, so bewirkt eine kleine Verschiebung eine starke Verschiebung des Schnittpunkts. Letzterer Fall liegt hier vor.